УДК 512:519.4

В. Ю. Попов

ОБ ЭКВАЦИОНАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

А. И. Мальцев в работе [1] построил конечно базируемое многообразие квазигрупп с неразрешимой эквациональной теорией и поставил в «Коуровской тетради» [2] вопрос о существовании конечно базируемых многообразий полугрупп, групп и колец с неразрешимой эквациональной теорией. Положительный ответ на этот вопрос для групп получен в [3]. В работах [4–6] построены примеры конечно базируемых многообразий неассоциативных колец с неразрешимой эквациональной теорией. Первый пример конечно базируемого многообразия полугрупп с неразрешимой эквациональной теорией построен в работе [7]. Другие примеры конечно базируемых многообразий полугрупп с неразрешимой эквациональной теорией можно найти в [8–11] Результаты, приведенные в работах [6] и [8], указывают на то, что существование удобного описания конечно базируемых многообразий с разрешимой эквациональной теорией маловероятно. В связи с этим становится актуальным вопрос об алгоритмической распознаваемости свойства разрешимости эквациональной теории, т.е. о разрешимости **проблемы распознавания эквациональной рекурсивности:**

существует ли алгоритм, определяющий по произвольной конечной системе тождеств данной сигнатуры, разрешима ли эквациональная теория многообразия, заданного этой системой тождеств?

В работе [12] доказана неразрешимость проблемы распознавания эквациональной рекурсивности для многообразия всех универсальных алгебр сигнатуры с двумя бинарными операциями и двумя константами. В [13] неразрешимость этой проблемы установлена для многообразия всех универсальных алгебр произвольной нетривиальной сигнатуры. Следующая теорема дает отрицательное решение этой проблемы для многообразия всех полугрупп.

Теорема 1. *Проблемы распознавания эквациональной рекурсивности для многообразия всех полугрупп неразрешима.*

В доказательствах мы будем существенно использовать технику и результаты из работы [7].

Для произвольного слова w обозначим через $\mathfrak{l}(w)$ длину слова w. Используя технику, развитую в [7], несложной модификацией конструкции полугруппы $S(M, \phi)$ из пункта 7.2.5 обзора [8] может быть получена следующая

Лемма 1. *Существуют полугруппа $\mathbb{S}$, заданная конечным множеством определяющих соотношений $u = v$ таких, что $\mathfrak{l}(u), \mathfrak{l}(v) \geq 2$, слово w_0 и рекурсивное множество слов $\mathbb{W}$ таких, что $\mathfrak{l}(w) \geq 2$ для любого $w \in \mathbb{W}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $\{w \mid \mathbb{S} \models w = w_0,\ w \in \mathbb{W}\}$ *— рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество;*

2) *если слово V равно в полугруппе $\mathbb{S}$ некоторому слову $w \in \mathbb{W}$, то V — бесквадратное слово и $\mathfrak{l}(V) \geq 2$;*

3) *если для слов U и V существуют такие слова $U', V' \in \mathbb{W} \cup \{w_0\}$, что $\mathbb{S} \models U = U', V = V'$, то либо $U = V$, либо U не является подсловом в V.*

Лемма 2. *Существуют рекурсивное множество слов $\mathbb{W} = \{w_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, слово w_0, множество конечно-определенных полугрупп $\{\mathbb{S}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ и рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел $\mathcal{P}$ такие, что*

1) *множество $\{\mathbb{S}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ эффективно задано;*

2) *если $i \in \mathcal{P}$, то полугруппа $\mathbb{S}_i$ изоморфна одноэлементной полугруппе;*

3) $\mathfrak{l}(w_i) \geq 2$ *для любого $i \in \mathbb{N}$;*

4) *если $i \notin \mathcal{P}$, то $\{w_j \mid \mathbb{S}_i \models w_j = w_0,\ w_j \in \mathbb{W}\}$ — рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество;*

5) *если $i \notin \mathcal{P}$ и слово V равно в полугруппе $\mathbb{S}_i$ некоторому слову $w_j \in \mathbb{W}$, то V — бесквадратное слово и $\mathfrak{l}(t) \geq 2$;*

6) *если $i \notin \mathcal{P}$ и для слов U и V существуют такие слова $U', V' \in \mathbb{W} \cup \{w_0\}$, что $\mathbb{S}_i \models U = U', V = V'$, то либо $U = V$, либо U не является подсловом слова V.*

Доказательство. Обозначим через $S_1 \rightleftharpoons \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \parallel u_{j1} = u_{j2}, j \in J\rangle$, $S_2 \rightleftharpoons \langle c_1, c_2, \ldots, c_m \parallel v_{j1} = v_{j2}, j \in J\rangle$ полугруппы, изоморфные полугруппе $\mathbb{S}$ из леммы 1. Пусть $\mathbb{W} = \{w_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ — множество и w_0 — слово из леммы 1, записанные в алфавите $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathbb{S}_i$ полугруппу с множеством образующих

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_m, x_1, x_2, \ldots, x_{2m}, y_1, y_2, \ldots, y_{2m}\},$$

заданную следующей системой определяющих соотношений:

$$x_t w_i y_t x_t w_0 y_t = b_t \quad (1 \leq t \leq m), \tag{1}$$

$$x_t w_i y_t x_t w_0 y_t = c_{t-m} \quad (m+1 \leq t \leq 2m), \tag{2}$$

$$x_{t-1} w_i y_{t+1} x_{t-1} w_0 y_{t+1} = x_t \quad (2 \leq t \leq 2m-1), \tag{3}$$

$$x_{t+1} w_i y_{t-1} x_{t+1} w_0 y_{t-1} = y_t \quad (2 \leq t \leq 2m-1), \tag{4}$$

$$x_{2m}w_iy_2x_{2m}w_0y_2 = x_1, \tag{5}$$
$$x_2w_iy_{2m}x_2w_0y_{2m} = y_1, \tag{6}$$
$$x_{2m-1}w_iy_1x_{2m-1}w_0y_1 = x_{2m}, \tag{7}$$
$$x_1w_iy_{2m-1}x_1w_0y_{2m-1} = y_{2m}, \tag{8}$$
$$u_{j1} = u_{j2} \quad (j \in J), \tag{9}$$
$$v_{j1} = v_{j2} \quad (j \in J), \tag{10}$$
$$x_tw_0y_tx_tw_0y_t = 0 \quad (1 \le t \le 2m). \tag{11}$$

Предположим, что в полугруппе S_2 имеет место соотношение $w_i = w_0$. Тогда, в силу соотношений (11), из соотношений (1)–(8) очевидным образом выводятся соотношения

$$b_t = 0,\ c_t = 0\ (1 \le t \le m), \quad x_t = 0,\ y_t = 0\ (1 \le t \le 2m).$$

Следовательно, если в полугруппе S_2 имеет место соотношение $w_i = w_0$, то полугруппа $\mathbb{S}_i$ изоморфна одноэлементной полугруппе.

Предположим теперь, что в полугруппе S_2 имеет место соотношение $w_i \ne w_0$. Обозначим через S_3 подполугруппу полугруппы $\mathbb{S}_i$, порожденную множеством $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Покажем, что полугруппы S_1 и S_3 изоморфны. Для этого достаточно показать, что для любых слов W_1 и W_2 равенство $W_1 = W_2$ выполняется в полугруппе S_1 тогда и только тогда, когда это равенство выполняется в полугруппе S_3. Заметим, что по построению полугруппа S_3 удовлетворяет всем определяющим соотношениям полугруппы S_1. Поэтому очевидно, что если равенство $W_1 = W_2$ выполняется в полугруппе S_1, то это равенство выполняется и в полугруппе S_3. Предположим теперь, что равенство $W_1 = W_2$ выполняется в полугруппе S_3. Тогда существует цепочка равенств

$$W_1 = U_1 = U_2 = \cdots = U_r = W_2 \tag{12}$$

такая, что каждое последующее слово в этой цепочке получено из предыдущего применением одного из определяющих соотношений полугруппы $\mathbb{S}_i$. Предположим, что ни одно из слов $U_1, U_2, \ldots, U_r$ не содержит вхождений образующих $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Тогда очевидно, что ни одно из слов $U_1, U_2, \ldots, U_r$ не содержит вхождений образующих $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}, y_1, y_2, \ldots, y_{2m}$. Следовательно, слова $U_1, U_2, \ldots, U_r$ записаны в алфавите $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Отсюда непосредственно вытекает, что для получения цепочки (12) использовались только определяющие соотношения (9). Таким образом, $W_1 = W_2$ в полугруппе S_1, что и требовалось.

Покажем, что если равенство $W_1 = W_2$ выполняется в полугруппе S_3, то существует цепочка равенств (12) такая, что ни одно из слов $U_1, U_2, \ldots, U_r$

не содержит вхождений образующих $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Предположим противное. Тогда для любой такой цепочки по крайней мере одно из слов $U_1, U_2, \ldots, U_r$ содержит вхождение некоторого образующего из множества $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. Для произвольного слова W обозначим через $\mathfrak{d}(W)$ количество максимальных подслов слова W над алфавитом $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. Рассмотрим цепочку равенств (12), для которой сумма $\mathfrak{d}(U_1) + \mathfrak{d}(U_2) + \cdots + \mathfrak{d}(U_r)$ минимальна. Предположим, что $\mathfrak{d}(U_s) = \max\{\mathfrak{d}(U_1), \mathfrak{d}(U_2), \ldots, \mathfrak{d}(U_r)\}$, причем для любого ν, $1 \leq \nu \leq s-1$, имеет место неравенство $\mathfrak{d}(U_\nu) < \mathfrak{d}(U_s)$, а для любого λ, $s \leq \lambda \leq s+p$, имеют место соотношения $\mathfrak{d}(U_\lambda) = \mathfrak{d}(U_s)$ и $\mathfrak{d}(U_{s+p+1}) < \mathfrak{d}(U_s)$. Так как для любого λ, $s \leq \lambda \leq s+p$, имеет место равенство $\mathfrak{d}(U_\lambda) = \mathfrak{d}(U_s)$, при получении цепочки равенств $U_s = U_{s+1} = \cdots = U_{s+p}$ использовались только соотношения (9) и (10). Следовательно, для любого λ, $s \leq \lambda \leq s+p$, слово U_λ имеет вид

$$\mathfrak{U}_1^\lambda \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^\lambda \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_q^\lambda \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^\lambda,$$

где $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_q$ — слова над алфавитом $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2m}, y_1, y_2, \ldots, y_{2m}\}$, а $\mathfrak{U}_1^\lambda, \mathfrak{U}_2^\lambda, \ldots, \mathfrak{U}_q^\lambda, \mathfrak{U}_{q+1}^\lambda$ — слова над алфавитом $\{b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, причем слова $\mathfrak{U}_1^\lambda$ и $\mathfrak{U}_{q+1}^\lambda$ могут быть пустыми. Очевидно, что если для некоторого значения λ слово $\mathfrak{U}_1^\lambda$ или $\mathfrak{U}_{q+1}^\lambda$ пустое, то и для всех остальных значений λ слово $\mathfrak{U}_1^\lambda$, соответственно слово $\mathfrak{U}_{q+1}^\lambda$, пустое. Кроме того, легко понять, что для любых λ и μ слово $\mathfrak{U}_\mu^\lambda$ состоит либо только из букв алфавита $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, либо только из букв алфавита $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, причем если для некоторого λ_0 слово $\mathfrak{U}_\mu^{\lambda_0}$ состоит из букв алфавита $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ (алфавита $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$), то и для всех остальных значений λ слово $\mathfrak{U}_\mu^\lambda$ состоит из букв алфавита $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ (соответственно $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$). Отсюда, в силу того что цепочка равенств $U_s = U_{s+1} = \cdots = U_{s+p}$ получена при помощи соотношений (9) и (10), вытекает, что выполнимость соотношения $U_s = U_{s+1} = \cdots = U_{s+p}$ в полугруппе $\mathbb{S}_i$ равносильна выполнимости следующих цепочек равенств в полугруппах S_1 и S_2:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{U}_1^s = \mathfrak{U}_1^{s+1} = \cdots = \mathfrak{U}_1^{s+p},\\
\mathfrak{U}_2^s = \mathfrak{U}_2^{s+1} = \cdots = \mathfrak{U}_2^{s+p},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{U}_q^s = \mathfrak{U}_q^{s+1} = \cdots = \mathfrak{U}_q^{s+p},\\
\mathfrak{U}_{q+1}^s = \mathfrak{U}_{q+1}^{s+1} = \cdots = \mathfrak{U}_{q+1}^{s+p}.
\end{gathered}$$

Заметим, что поскольку цепочка равенств $U_s = U_{s+1} = \cdots = U_{s+p}$ получена при помощи соотношений (9) и (10), справедливо следующее: если для некоторых λ и μ имеет место соотношение $\mathfrak{U}_\mu^\lambda \neq \mathfrak{U}_\mu^{\lambda+1}$, то для любого $l \neq \mu$ имеет место соотношение $\mathfrak{U}_l^\lambda = \mathfrak{U}_l^{\lambda+1}$. Поскольку для любого

$\lambda \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$ имеет место неравенство $\mathfrak{d}(U_\lambda) < \mathfrak{d}(U_s)$, слово U_s получено из слова U_{s-1} применением справа налево одного из соотношений (1)–(8) или (11). Так как для любого $\mu \in \{s, s+1, \ldots, s+p\}$ имеет место равенство $\mathfrak{d}(U_\mu) = \mathfrak{d}(U_s)$ и $\mathfrak{d}(U_{s+p+1}) < \mathfrak{d}(U_s)$, слово U_{s+p+1} получается из слова U_{s+p} применением слева направо одного из соотношений (1)–(8). Следовательно, слова $\mathfrak{U}_1^s\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^s\mathfrak{V}_2\ldots\mathfrak{U}_q^s\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^s$ и $\mathfrak{U}_1^{s+p}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+p}\mathfrak{V}_2\ldots\mathfrak{U}_q^{s+p}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+p}$ содержат подслова, принадлежащие множеству

$$\begin{gathered}
\{x_t w_i y_t x_t w_0 y_t \mid 1 \le t \le 2m\} \cup \\
\cup \{x_{t-1} w_i y_{t+1} x_{t-1} w_0 y_{t+1}, x_{t+1} w_i y_{t-1} x_{t+1} w_0 y_{t-1} \mid 2 \le t \le 2m-1\} \cup \\
\cup \{x_{2m} w_i y_2 x_{2m} w_0 y_2, x_2 w_i y_{2m} x_2 w_0 y_{2m}, \\
x_{2m-1} w_i y_1 x_{2m-1} w_0 y_1, x_1 w_i y_{2m-1} x_1 w_0 y_{2m-1}\}. \qquad (13)
\end{gathered}$$

Отсюда вытекает, что $\mathfrak{U}_\lambda^s = w_i$, $\mathfrak{U}_{\lambda+1}^s = w_0$, $\mathfrak{U}_\mu^{s+p} = w_i$, $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s+p} = w_0$ для некоторых λ и μ, причем слова $\mathfrak{V}_{\lambda-1}^s\mathfrak{U}_\lambda^s\mathfrak{V}_\lambda^s\mathfrak{U}_{\lambda+1}^s\mathfrak{V}_{\lambda+1}^s$ и $\mathfrak{V}_{\mu-1}^{s+p}\mathfrak{U}_\mu^{s+p}\mathfrak{V}_\mu^{s+p}\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu+1}^{s+p}$ содержат подслова, принадлежащие множеству (13). Пусть для определенности слово U_s получено из слова U_{s-1} применением некоторого соотношения вида (1) и слово U_{s+p+1} получается из слова U_{s+p} применением некоторого соотношения вида (1). Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично. Предположим, что $\mathfrak{U}_\mu^s = w_i$, $\mathfrak{U}_{\mu+1}^s = w_0$ и $\lambda < \mu$. Тогда очевидно, что цепочку равенств (12) можно заменить цепочкой

$$\begin{gathered}
W_1 = U_1 = U_2 = \cdots = U_{s-2} = U_{s-1} = \\
= \mathfrak{U}_1^s\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^s\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^s\mathfrak{W}_1\mathfrak{U}_{\lambda+2}^s\mathfrak{V}_{\lambda+2}^s\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^s\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^s\mathfrak{V}_{\mu+2}^s\cdots\mathfrak{U}_q^s\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^s = \\
= \mathfrak{U}_1^{s+1}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+1}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^s\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^s\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots \\
\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+1}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+1}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+1}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+1}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+1} = \\
= \mathfrak{U}_1^{s+2}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+2}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s+1}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots \\
\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+2}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+2}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+2}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+2} = \cdots = \\
= \mathfrak{U}_1^{s+p}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+p}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s+p-1}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+p-1}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots \\
\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+p}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+p}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+p}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+p} = \\
= U_{s+p+1} = U_{s+p+2} = \cdots = U_r = W_2,
\end{gathered}$$

где слово $\mathfrak{W}_1$ получено из слова $\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s+p}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+p}\mathfrak{V}_{\lambda+1}$ заменой $x_t w_i y_t x_t w_0 y_t$ на b_t, а $\mathfrak{W}_2$ — слово, полученное из слова $\mathfrak{V}_{\mu-1}\mathfrak{U}_\mu^{s+p}\mathfrak{V}_\mu\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu+1}$ заменой $x_t w_i y_t x_t w_0 y_t$ на b_t. При этом очевидно, что

$$\begin{gathered}
\mathfrak{d}(U_1) + \mathfrak{d}(U_2) + \cdots + \mathfrak{d}(U_{s-2}) + \mathfrak{d}(U_{s-1}) + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^s\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^s\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^s\mathfrak{W}_1\mathfrak{U}_{\lambda+2}^s\mathfrak{V}_{\lambda+2}^s\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^s\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^s\mathfrak{V}_{\mu+2}^s\cdots\mathfrak{U}_q^s\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^s) +
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
+\,\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s+1}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+1}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots\\
\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+1}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+1}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+1}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+1}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+1})\,+\\
+\,\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s+2}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+2}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s+1}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots\\
\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+2}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+2}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+2}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+2})+\cdots+\\
+\,\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s+p}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+p}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s+p-1}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+p-1}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots\\
\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+p}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+p}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+p}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+p})\,+\\
+\,\mathfrak{d}(U_{s+p+1})+\mathfrak{d}(U_{s+p+2})+\cdots+\mathfrak{d}(U_r)<\mathfrak{d}(U_1)+\mathfrak{d}(U_2)+\cdots+\mathfrak{d}(U_r).
\end{gathered}
$$

Это противоречит нашему предположению о том, что для цепочки равенств (12) число $\mathfrak{d}(U_1)+\mathfrak{d}(U_2)+\cdots+\mathfrak{d}(U_r)$ является минимальным. Предположим теперь, что $\mathfrak{U}_\mu^s = w_i$, $\mathfrak{U}_{\mu+1}^s = w_0$ и $\lambda > \mu$. Тогда очевидно, что цепочку равенств (12) можно заменить цепочкой

$$
\begin{gathered}
W_1 = U_1 = U_2 = \cdots = U_{s-2} = U_{s-1} =\\
=\mathfrak{U}_1^{s}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s}\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s}\mathfrak{W}_1\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s}\mathfrak{V}_{\lambda+2}^{s}\cdots\mathfrak{U}_q^{s}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s}=\\
=\mathfrak{U}_1^{s+1}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+1}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+1}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+1}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+1}\cdots\\
\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+1}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+1}=\\
=\mathfrak{U}_1^{s+2}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+2}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+2}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+2}\cdots\\
\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s+1}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+2}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+2}=\cdots=\\
=\mathfrak{U}_1^{s+p}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+p}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+p}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+p}\cdots\\
\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s+p-1}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+p-1}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+p}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+p}=\\
=U_{s+p+1}=U_{s+p+2}=\cdots=U_r=W_2,
\end{gathered}
$$

где слово $\mathfrak{W}_1$ получено из слова $\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s+p}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+p}\mathfrak{V}_{\lambda+1}$ заменой $x_tw_iy_tx_tw_0y_t$ на b_t, а $\mathfrak{W}_2$ — слово, полученное из слова $\mathfrak{V}_{\mu-1}\mathfrak{U}_\mu^{s+p}\mathfrak{V}_\mu\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu+1}$ заменой $x_tw_iy_tx_tw_0y_t$ на b_t. При этом очевидно, что

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{d}(U_1)+\mathfrak{d}(U_2)+\cdots+\mathfrak{d}(U_{s-2})+\mathfrak{d}(U_{s-1})\,+\\
+\,\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s}\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s}\mathfrak{W}_1\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s}\mathfrak{V}_{\lambda+2}^{s}\cdots\mathfrak{U}_q^{s}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s})\,+\\
+\,\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s+1}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+1}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+1}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+1}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+1}\cdots\\
\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+1}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+1})\,+\\
+\,\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s+2}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+2}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+2}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+2}\cdots\\
\cdots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_\lambda^{s+1}\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+1}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+2}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+2})+\cdots+\\
+\,\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s+p}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+p}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+p}\mathfrak{W}_2\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+p}\cdots
\end{gathered}
$$

$$\ldots\mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda-1}\mathfrak{U}_{\lambda}^{s+p-1}\mathfrak{V}_{\lambda}\mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+p-1}\mathfrak{V}_{\lambda+1}\mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\lambda+2}\cdots\mathfrak{U}_{q}^{s+p}\mathfrak{V}_{q}\mathfrak{U}_{q+1}^{s+p})+$$
$$+\mathfrak{d}(U_{s+p+1})+\mathfrak{d}(U_{s+p+2})+\cdots+\mathfrak{d}(U_r)<\mathfrak{d}(U_1)+\mathfrak{d}(U_2)+\cdots+\mathfrak{d}(U_r).$$

Это противоречит нашему предположению о том, что для цепочки равенств (12) число $\mathfrak{d}(U_1)+\mathfrak{d}(U_2)+\cdots+\mathfrak{d}(U_r)$ является минимальным. Наконец, если $\mathfrak{U}_{\mu}^{s}=w_i$, $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s}=w_0$ и $\lambda=\mu$, то (12) можно заменить цепочкой

$$\begin{gathered}
W_1=U_1=U_2=\cdots=U_{s-2}=U_{s-1}=\\
=\mathfrak{U}_1^{s}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s}\mathfrak{W}\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s}\cdots\mathfrak{U}_q^{s}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s}=\\
=\mathfrak{U}_1^{s+1}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+1}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+1}\mathfrak{W}\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+1}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+1}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+1}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+1}=\\
=\mathfrak{U}_1^{s+2}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+2}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+2}\mathfrak{W}\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+2}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+2}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+2}=\cdots=\\
=\mathfrak{U}_1^{s+p}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+p}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+p}\mathfrak{W}\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+p}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+p}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+p}=\\
=U_{s+p+1}=U_{s+p+2}=\cdots=U_r=W_2,
\end{gathered}$$

где $\mathfrak{W}$ — слово, полученное из слова $\mathfrak{V}_{\mu-1}\mathfrak{U}_{\mu}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu}\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu+1}$ заменой слова $x_tw_iy_tx_tw_0y_t$ на b_t. При этом ясно, что

$$\begin{gathered}
\mathfrak{d}(U_{\dot{s}})+\mathfrak{d}(U_{\dot{s}})+\cdots+\mathfrak{d}(U_{\dot{s}-2})+\mathfrak{d}(U_{\dot{s}-1})+\\
+\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s}\mathfrak{W}\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s}\cdots\mathfrak{U}_q^{s}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s})+\\
+\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s+1}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+1}\mathfrak{V}_2\ldots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+1}\mathfrak{W}\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+1}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+1}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+2}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+1})+\\
+\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s+2}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+2}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+2}\mathfrak{W}\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+2}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+2}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+2}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+2})+\cdots+\\
+\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s+p}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_2^{s+p}\mathfrak{V}_2\cdots\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s+p}\mathfrak{W}\mathfrak{U}_{\mu+2}^{s+p}\mathfrak{V}_{\mu+2}^{s+p}\cdots\mathfrak{U}_q^{s+p}\mathfrak{V}_q\mathfrak{U}_{q+1}^{s+p})+\\
+\mathfrak{d}(U_{s+p+1})+\mathfrak{d}(U_{s+p+2})+\cdots+\mathfrak{d}(U_r)<\mathfrak{d}(U_1)+\mathfrak{d}(U_2)+\cdots+\mathfrak{d}(U_r).
\end{gathered}$$

Это снова противоречит выбору цепочки равенств (12).

Таким образом, мы рассмотрели случай, когда $\mathfrak{U}_{\mu}^{s}=w_i$ и $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s}=w_0$, и убедились в том, что $\mathfrak{U}_{\mu}^{s}\neq w_i$ или $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s}\neq w_0$. Следовательно, нам нужно рассмотреть три случая: $\mathfrak{U}_{\mu}^{s}\neq w_i$ и $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s}\neq w_0$, $\mathfrak{U}_{\mu}^{s}=w_i$ и $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s}\neq w_0$, $\mathfrak{U}_{\mu}^{s}\neq w_i$ и $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s}=w_0$. Мы рассмотрим только случай $\mathfrak{U}_{\mu}^{s}\neq w_i$ и $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s}\neq w_0$, поскольку остальные случаи можно получить несложной комбинацией конструкций для случаев $\mathfrak{U}_{\mu}^{s}\neq w_i$ и $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s}\neq w_0$, $\mathfrak{U}_{\mu}^{s}=w_i$ и $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s}=w_0$. Так как $\mathfrak{U}_{\mu}^{s}\neq w_i$ и $\mathfrak{U}_{\mu}^{s+p}\neq w_i$, очевидно, что в последовательности слов $\mathfrak{U}_{\mu}^{s},\mathfrak{U}_{\mu}^{s+1},\ldots,\mathfrak{U}_{\mu}^{s+p}$ не все слова равны между собой. Выделим из последовательности $\mathfrak{U}_{\mu}^{s},\mathfrak{U}_{\mu}^{s+1},\ldots,\mathfrak{U}_{\mu}^{s+p}$ максимальную подпоследовательность $\mathfrak{U}_{\mu}^{s_{\alpha_1}},\mathfrak{U}_{\mu}^{s_{\alpha_2}},\ldots,\mathfrak{U}_{\mu}^{s_{\alpha_{t'}}}$ такую, что ни одно слово из этой последовательности не равно последующему. Совершенно аналогично из последовательности $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s},\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s+1},\ldots,\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s+p}$ можно выделить максимальную подпоследовательность $\mathfrak{U}_{\mu+1}^{s_{\beta_1}}, \mathfrak{U}_{\mu+1}^{s_{\beta_2}}, \ldots, \mathfrak{U}_{\mu+1}^{s_{\beta_{t''}}}$ такую, что ни одно слово из этой последовательности не равно последующему. В силу того что если для некоторых λ и μ имеет место соотношение $\mathfrak{U}_\mu^\lambda \neq \mathfrak{U}_\mu^{\lambda+1}$, то для любого $l \neq \mu$ имеет место соотношение $\mathfrak{U}_l^\lambda = \mathfrak{U}_l^{\lambda+1}$, числа $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_{t'}}, s_{\beta_1}, s_{\beta_2}, \ldots, s_{\beta_{t''}}$ попарно различны. Следовательно, если $\lambda < \mu$, то цепочку равенств (12) можно заменить цепочкой

$$\begin{gathered}
W_1 = U_1 = U_2 = \cdots = U_{s-2} = U_{s-1} = \\
= \mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_2}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^s \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s = \\
= \mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_3}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^s \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s = \cdots = \\
= \mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_{t'}}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^s \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s = \\
= \mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_{t'}}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^{s_{\beta_2}} \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s = \\
= \mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_{t'}}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^{s_{\beta_3}} \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s = \cdots = \\
= \mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_{t'}}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^{s_{\beta_{t''}}} \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s = \\
= \mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2}^s \cdots \mathfrak{U}_{\mu+1}^s \mathfrak{W}_2 \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s = \\
= \mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{V}_{\lambda-1} \mathfrak{U}_\lambda^s \mathfrak{V}_\lambda \mathfrak{U}_{\lambda+1}^s \mathfrak{V}_{\lambda+1} \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu+1}^s \mathfrak{W}_2 \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s = \\
= \mathfrak{U}_1^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_{\lambda-1} \mathfrak{U}_\lambda^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_\lambda \mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_{\lambda+1} \mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{W}_2 \mathfrak{U}_{\mu+2}^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^{s_{\gamma_1}} = \\
= \mathfrak{U}_1^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_{\lambda-1} \mathfrak{U}_\lambda^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_\lambda \mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_{\lambda+1} \mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\mathfrak{U}_{\mu-1}^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{W}_2 \mathfrak{U}_{\mu+2}^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^{s_{\gamma_2}} = \cdots = \\
= \mathfrak{U}_1^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_{\lambda-1} \mathfrak{U}_\lambda^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_\lambda \mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_{\lambda+1} \mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{W}_2 \mathfrak{U}_{\mu+2}^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^{s_{\gamma_{t'''}}} = \\
= U_{s+p+1} = U_{s+p+2} = \cdots = U_r = W_2,
\end{gathered}$$

где слово $\mathfrak{W}_1$ получено из слова $\mathfrak{V}_{\lambda-1} \mathfrak{U}_\lambda^{s+p} \mathfrak{V}_\lambda \mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s+p} \mathfrak{V}_{\lambda+1}$ заменой $x_t w_i y_t x_t w_0 y_t$ на b_t; $\mathfrak{W}_2$ — слово, полученное из слова $\mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s+p} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^{s+p} \mathfrak{V}_{\mu+1}$ заменой

$x_t w_i y_t x_t w_0 y_t$ на b_t; $s_{\gamma_1}, s_{\gamma_2}, \ldots, s_{\gamma_{t'''}}$ — последовательность, полученная из последовательности $s+1, s+2, \ldots, s+p$ удалением подпоследовательностей $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_{t'}}$ и $s_{\beta_1}, s_{\beta_2}, \ldots, s_{\beta_{t''}}$. При этом очевидно, что

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{d}(W_1) + \mathfrak{d}(U_1) + \mathfrak{d}(U_2) + \cdots + \mathfrak{d}(U_{s-2}) + \mathfrak{d}(U_{s-1}) + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_2}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^s \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s) + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_3}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^s \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s) + \cdots + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_{t'}}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^s \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s) + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_{t'}}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^{s_{\beta_2}} \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} c \ldots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s) + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_{t'}}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^{s_{\beta_3}} \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s) + \ \ldots \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{V}_{\mu-1} \mathfrak{U}_\mu^{s_{\alpha_{t'}}} \mathfrak{V}_\mu \mathfrak{U}_{\mu+1}^{s_{\beta_{t''}}} \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s) + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{W}_1 \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2}^s \cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{W}_2 \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s) + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^s \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^s \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^s \mathfrak{V}_{\lambda-1} \mathfrak{U}_\lambda^s \mathfrak{V}_\lambda \mathfrak{U}_{\lambda+1}^s \mathfrak{V}_{\lambda+1} \mathfrak{U}_{\lambda+2}^s \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^s \mathfrak{W}_2 \mathfrak{U}_{\mu+2}^s \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^s \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^s) + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_{\lambda-1} \mathfrak{U}_\lambda^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_\lambda \mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_{\lambda+1} \mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{W}_2 \mathfrak{U}_{\mu+2}^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^{s_{\gamma_1}} \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^{s_{\gamma_1}}) + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_{\lambda-1} \mathfrak{U}_\lambda^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_\lambda \mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_{\lambda+1} \mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{W}_2 \mathfrak{U}_{\mu+2}^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^{s_{\gamma_2}} \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^{s_{\gamma_2}}) + \cdots + \\
+ \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_1 \mathfrak{U}_2^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_2 \cdots \mathfrak{U}_{\lambda-1}^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_{\lambda-1} \mathfrak{U}_\lambda^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_\lambda \mathfrak{U}_{\lambda+1}^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_{\lambda+1} \mathfrak{U}_{\lambda+2}^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_{\lambda+2} \cdots \\
\cdots \mathfrak{U}_{\mu-1}^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{W}_2 \mathfrak{U}_{\mu+2}^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{U}_q^{s_{\gamma_{t'''}}} \mathfrak{V}_q \mathfrak{U}_{q+1}^{s_{\gamma_{t'''}}}) + \\
+ \mathfrak{d}(U_{s+p+1}) + \mathfrak{d}(U_{s+p+2}) + \cdots + \mathfrak{d}(U_r) + \mathfrak{d}(W_2) < \mathfrak{d}(U_1) + \mathfrak{d}(U_2) + \cdots + \mathfrak{d}(U_r).
\end{gathered}
$$

Это противоречит нашему предположению о том, что для цепочки равенств (12) число $\mathfrak{d}(U_1) + \mathfrak{d}(U_2) + \cdots + \mathfrak{d}(U_r)$ является минимальным. Случай, когда $\lambda > \mu$, можно рассмотреть совершенно аналогично случаю $\lambda < \mu$.

Таким образом, мы получили противоречие с предположением о том, что для любой цепочки равенств вида (12) по крайней мере одно из слов

$U_1, U_2, \ldots, U_r$ содержит вхождение образующих из множества $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. Отсюда вытекает, что если равенство $W_1 = W_2$ выполняется в полугруппе S_3, то это равенство выполняется и в полугруппе S_1. Следовательно, полугруппы S_1 и S_3 изоморфны. Отсюда, с учетом того, что S_1 — полугруппа из леммы 1, вытекает требуемое. Лемма доказана.

В [7] введены слова $P_{k,i} = xy^{k+i}x^2$, где $k \geq 3$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и доказана

Лемма 3. *Для любого натурального числа k, $k \geq 3$, множество слов $\mathbb{P} = \{P_{k,1}, P_{k,2}, \ldots, P_{k,k-1}\}$ удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *всякое слово вида $P_{k,i_1}P_{k,i_2}\cdots P_{k,i_n}$ содержит лишь n вхождений слов из $\mathbb{P}$;*

2) *если слово $P_{k,i_1}P_{k,i_2}\cdots P_{k,i_n}$ для некоторой подстановки φ содержит подслово $\varphi(P_{k,i}P_{k,j})$, то либо $\varphi(x) = x$ и $\varphi(y) = y$, либо слово $i_1 i_2 \cdots i_n$ не является бесквадратным.*

Слова вида $P_{k,i_1}P_{k,i_2}\ldots P_{k,i_n}$, $n > 1$, будем называть $\mathbb{P}$-словами. Пусть w — произвольное слово. Будем говорить, что слово w имеет $\mathbb{P}$-разбиение ранга 0, если w не содержит подслов, являющихся $\mathbb{P}$-словами. При $r \geq 1$ скажем, что слово w имеет $\mathbb{P}$-разбиение ранга r, если $w = u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_r v_r u_{r+1}$, причем

1) для любого j слово v_j — произведение $\mathbb{P}$-слов,
2) u_1 и u_{r+1} — возможно пустые слова,
3) $u_2, u_3, \ldots, u_r$ — непустые слова,
4) слова $u_1, u_2, \ldots, u_{r+1}$ не содержат подслов, являющихся $\mathbb{P}$-словами.

Лемма 4. *Если слово w не содержит подслов вида*

$$u^{k+1}v^{k+1}, yu^{k+i}yv^{k+j}y^2, yu^{k+i}y^2v^{k+j}y, \tag{14}$$

где $1 \leq i \leq k+1$, $1 \leq j \leq k+1$, и подслов вида $\varphi(P_{k,i}P_{k,j})$ ни для какой нетривиальной подстановки φ, то ранг $\mathbb{P}$-разбиения слова w определяется эффективно и однозначно.

Доказательство. Предположим, что слово w не содержит подслов вида $u^{k+1}v^{k+1}$ и подслов вида $\varphi(P_{k,i}P_{k,j})$ ни для какой нетривиальной подстановки φ. Тогда очевидно, что слово w избегает слово x^{2k+2}.

Допустим, что слово w избегает слово x^{k+1}. Тогда очевидно, что слово w имеет $\mathbb{P}$-разбиение ранга 0 и ранг $\mathbb{P}$-разбиения определяется однозначно.

Предположим теперь, что слово w содержит подслова вида x^{k+1}. Представим слово w в виде $w_1 w_2 \cdots w_s$, где для любого j, $1 \leq j \leq s$, слово w_j либо равно x^p, где $k+1 \leq p \leq 2k+1$, либо избегает слова x^p, где $k+1 \leq p \leq 2k+1$, причем потребуем, чтобы при $w_j = x^p$ слово w_{j-1} не заканчивалось на x, а слово w_{j+1} не начиналось на x. Поскольку слово w избегает слова вида x^{2k+2}, легко понять, что слово $w_1w_2\cdots w_s$ по слову w строится однозначно. Теперь везде в слове $w_1w_2\cdots w_s$, где это возможно, подслова $w_{j-1}w_jw_{j+1}$ такие, что $w_j = x^p$, заменим на $\overline{w}_{j-1}p_j\overline{w}_{j+1}$, где $p_j = yw_jy^2$, $w_{j-1} = \overline{w}_{j-1}y$, $w_{j+1} = y^2\overline{w}_{j+1}$, причем y — минимальное слово с условием $w_{j-1} = \overline{w}_{j-1}y$, $w_{j+1} = y^2\overline{w}_{j+1}$. Так как слово w не содержит подслов вида $u^{k+1}v^{k+1}$ ни для каких слов u и v, слова w_{j-1} и w_{j+1} избегают слово x^{k+1} и, следовательно, выбор подслов вида $w_{j-1}w_jw_{j+1}$, заменяемых на слова вида $\overline{w}_{j-1}p_j\overline{w}_{j+1}$, осуществляется однозначно. Кроме того, поскольку w не содержит подслов вида $\varphi(P_{k,i}P_{k,j})$ ни для какой нетривиальной подстановки φ, слово $\overline{w}_{j-1}p_j\overline{w}_{j+1}$ однозначно строится по слову $w_{j-1}w_jw_{j+1}$. Причем, в силу того что слово w не содержит подслов вида $yu^{k+i}yv^{k+j}y^2$, $yu^{k+i}y^2v^{k+j}y$, $1 \le i \le k+1$, $1 \le j \le k+1$, ни для каких слов u, v и y, если в слове $w_1w_2\cdots w_s$ содержится подслово $w_{j-2}w_{j-1}w_jw_{j+1}w_{j+2}$ такое, что $w_{j-1} = x^{p'}$, $w_{j+1} = x^{p''}$, то замена подслова $w_{j-2}w_{j-1}w_j$ на $\overline{w}_{j-2}p_{j-1}\overline{w}_j$ не помешает последующей замене подслова $w_{j-2}w_{j-1}\overline{w_j}$ на $\overline{w}_{j-2}p_{j-1}\overline{\overline{w}_j}$.

Если для любого максимального подслова вида $p_jp_{j+2}\cdots p_{j+2t}$ имеет место неравенство $t \ge 1$ и для любого l слова p_{j+2l} и p_{j+2l+2} или слова p_{j+2l} и p_{j+2l-2} записаны в одном и том же алфавите, то заменим в полученном из $w_1w_2\cdots w_s$ слове максимальные подслова вида $\overline{w}_jw_{j+1}w_{j+2}\cdots w_{j+t}$, или $\overline{w}_jw_{j+1}w_{j+2}\cdots w_{j+t}\overline{w}_{j+t+1}$, или $w_jw_{j+1}\cdots w_{j+t}\overline{w}_{j+t+1}$ на u_j, максимальные подслова вида $p_jp_{j+2}\cdots p_{j+2t}$ — на v_j и произведем перенумерацию. В результате получим требуемое $\mathbb{P}$-разбиение слова w.

Предположим теперь, что для некоторого максимального подслова вида $p_jp_{j+2}\cdots p_{j+2t}$ имеет место равенство $t = 0$, т.е. слово $p_jp_{j+2}\cdots p_{j+2t}$ имеет вид p_j. Тогда подслово $\overline{w}_{j-1}p_j\overline{w}_{j+1}$ заменим обратно на $w_{j-1}w_jw_{j+1}$. Если для некоторого максимального подслова вида $p_jp_{j+2}\ldots p_{j+2t}$ и для некоторого l и слова p_{j+2l}, p_{j+2l+2}, и слова p_{j+2l}, p_{j+2l-2} записаны в различных алфавитах, тогда подслово p_{j+2l} заменим обратно на yw_jy^2. После этого заменим в полученном из $w_1w_2\cdots w_s$ слове максимальные подслова, имеющие вид $\overline{w}_jw_{j+1}w_{j+2}\cdots w_{j+t}$, или $\overline{w}_jw_{j+1}w_{j+2}\cdots w_{j+t}\overline{w}_{j+t+1}$, или $w_jw_{j+1}\cdots w_{j+t}\overline{w}_{j+t+1}$, на u_j, максимальные подслова вида $p_jp_{j+2}\cdots p_{j+2t}$ — на v_j и произведем перенумерацию. В результате получим требуемое $\mathbb{P}$-разбиение слова w. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Пусть S — произвольная полугруппа из множества $\{\mathbb{S}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, построенного в лемме 2, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — множество образующих полугруппы S, $\{u_{i1} = u_{i2} \mid i \in I\}$ — множество определяющих соотношений полугруппы S. Пусть $k = n+4$

и $\{U_{i1}(x,y) = U_{i2}(x,y) \mid i \in I\}$ — множество тождеств, полученное из множества определяющих соотношений $\{u_{i1} = u_{i2} \mid i \in I\}$ заменой каждого вхождения a_j, $1 \le j \le n$, на $P_{k,k-1}P_{k,j}P_{k,k-2}$. Обозначим через $\mathfrak{X}_S$ многообразие полугрупп, заданное тождествами $\{U_{i1}(x,y) = U_{i2}(x,y) \mid i \in I\}$, а через $\mathfrak{Y}_S$ — его подмногообразие, заданное внутри $\mathfrak{X}_S$ тождествами

$$x^{k+1}y^{k+1} = yu^{k+i}yv^{k+j}y^2 = yu^{k+i}y^2v^{k+j}y = xzy^{k+i}(xz)^3y^{k+j}(xz)^2 = \\ = x(yz)^{k+i}x^3(yz)^{k+j}x^2 = 0,\ 1 \le i,j \le k+1. \tag{15}$$

Пусть F — полугруппа счетного ранга, свободная в многообразии всех полугрупп, $F\mathfrak{Y}_S$ — полугруппа счетного ранга, свободная в многообразии полугрупп $\mathfrak{Y}_S$.

Пусть U и V — произвольные слова в алфавите $\{e_1, e_2, \ldots, e_r, \ldots\}$. Предположим, что одно из слов U и V содержит в качестве подслова одно из слов вида (14) или одно из слов вида

$$xzy^{k+i}(xz)^3y^{k+j}(xz)^2,\ x(yz)^{k+i}x^3(yz)^{k+j}x^2. \tag{16}$$

Тогда это слово равно нулю. Заметим, что, в силу разрешимости проблемы равенства в абсолютно свободной полугруппе, существует алгоритм, определяющий по произвольному слову, содержит ли оно подслово указанного вида. Следовательно, в дальнейшем случай, когда одно из слов U и V содержит подслово вида $x^{k+1}y^{k+1}$, или $yu^{k+i}yv^{k+j}y^2$, или $yu^{k+i}y^2v^{k+j}y$, или $xzy^{k+i}(xz)^3y^{k+j}(xz)^2$, или $x(yz)^{k+i}x^3(yz)^{k+j}x^2$, мы можем не рассматривать.

Так как слова U и V не содержат подслов вида (14) и (16), $\mathbb{P}$-разбиения слов U и V, в силу леммы 4, определяются эффективно и однозначно. Кроме того, слова U и V являются изотермами для тождеств (15). Отсюда вытекает, что слова U и V мы можем преобразовывать только при помощи тождеств вида $U_{i1}(x,y) = U_{i2}(x,y)$. Следовательно, в силу леммы 3 при применении тождества многообразия $\mathfrak{Y}_S$ к слову U или к слову V мы заменяем некоторое подслово, являющееся $\mathbb{P}$-словом, на некоторое другое подслово, являющееся $\mathbb{P}$-словом. Поэтому слова, получающиеся из слов U и V, будут иметь тот же ранг $\mathbb{P}$-разбиения, что и слова U и V. Отсюда вытекает, что для равенства слов U и V необходимо, чтобы ранг $\mathbb{P}$-разбиения слова U был равен рангу $\mathbb{P}$-разбиения слова V.

Если ранг $\mathbb{P}$-разбиений слов U и V равен 0, то слова U и V равны в полугруппе $F\mathfrak{Y}_S$ тогда и только тогда, когда они равны в полугруппе F. Если ранг $\mathbb{P}$-разбиений слов U и V равен 1 и $u_1v_1u_2$ — $\mathbb{P}$-разбиение слова U, $u_1'v_1'u_2'$ — $\mathbb{P}$-разбиение слова V, то слова U и V равны в полугруппе $F\mathfrak{Y}_S$ тогда и только тогда, когда слова u_1 и u_1', u_2 и u_2' равны в полугруппе F, и, кроме того, в полугруппе S имеет место равенство $w = w'$, где w и w'

— те слова, из которых v_1 и v_1' получены заменой каждого вхождения a_j, $1 \leq j \leq n$, на $P_{k,k-1}P_{k,j}P_{k,k-2}$. Если ранг $\mathbb{P}$-разбиений слов U и V больше 1, то совершенно аналогично случаю, когда ранг равен 1, мы сведем проблему распознавания истинности равенства $U = V$ в полугруппе $F\mathfrak{Y}_S$ к распознаванию истинности некоторой системы равенств в полугруппах S и F.

В силу леммы 3 для любых элементов u и v полугруппы S равенство $u = v$ выполняется в полугруппе S тогда и только тогда, когда в многообразии $\mathfrak{X}_S$ выполняется тождество $U(x,y) = V(x,y)$, где $U(x,y)$ и $V(x,y)$ — слова, полученные из u и v заменой каждого вхождения a_j, $1 \leq j \leq n$, на $P_{k,k-1}P_{k,j}P_{k,k-2}$. Несложно убедиться в том, что слова $U(x,y)$ и $V(x,y)$ — изотермы для тождеств (15). Следовательно, тождество $U(x,y) = V(x,y)$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}_S$ тогда и только тогда, когда оно выполняется в многообразии $\mathfrak{Y}_S$. Отсюда вытекает, что если в полугруппе S неразрешима проблема равенства, то эквациональная теория многообразия $\mathfrak{Y}_S$ тоже неразрешима.

Таким образом, эквациональная теория многообразия $\mathfrak{Y}_S$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима проблема равенства в полугруппе S. В силу леммы 2 множество полугрупп с разрешимой проблемой равенства из $\{\mathbb{S}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ не является рекурсивным. Следовательно, множество многообразий $\mathfrak{Y}_S$ с разрешимой эквациональной теорией нерекурсивно. Так как $\{\mathfrak{Y}_S \mid S \in \{\mathbb{S}_i \mid i \in \mathbb{N}\}\}$ — рекурсивное подмножество в множестве всех конечно базируемых многообразий полугрупп, то множество конечно базируемых многообразий полугрупп с разрешимой эквациональной теорией нерекурсивно.

В заключение автор благодарит профессора Ю. М. Важенина, под руководством которого выполнена данная работа, и профессора М. В. Волкова за полезные обсуждения.

Литература

1. Мальцев А. И. Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп // Мат. сб. 1966. Т.69, №1. С.3–12.

2. Коуровская тетрадь. 10-е изд. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1986.

3. Клейман Ю. Г. О тождествах в группах // Тр. Моск. матем. об-ва. 1982. Т.44. С.62–108.

4. Попов В. Ю. Эквациональные теории многообразий метабелевых и коммутативных колец // Алгебра и логика. 1995. Т.34, №3. С.347–361.

5. Попов В. Ю. О разрешимости эквациональных теорий многообразий колец // Мат. заметки. 1998. Т.63, №6. С.873–881.

6. Попов В. Ю. Об эквациональных теориях многообразий антикоммутативных колец // Мат. заметки. 1999. Т.65, №2. С.230–245.

7. Мурский В. Л. Несколько примеров многообразий полугрупп // Мат. заметки. 1968. Т.3, №6. С.663–670.

8. Kharlampovich O. G., Sapir M. V. Algorithmic problems in varieties // Internat. J. Algebra Comput. 1995. Vol.5, № 4–5. P.379–602.

9. Попов В. Ю. О некоторых алгоритмических свойствах классов полугрупп и колец. Деп. в ВИНИТИ. №2203-В99.

10. Попов В. Ю. О некоторых алгоритмических свойствах систем полугрупповых тождеств. Деп. в ВИНИТИ. №3462-В99.

11. Попов В. Ю. О тождествах полугрупп и колец. Деп. в ВИНИТИ. №3461-В99.

12. Perkins P. Unsolvable problems for equational theories // Notre Dame J. Formal Logic. 1967. Vol.8. P.175–185.

13. McNulty G. Undecidable properties of finite sets of equations // J. Symbolic Logic. 1976. Vol.41, №3. P.589–604.

Статья поступила 05.10.2000 г.
окончательный вариант 30.12.2000 г.